(10) إذا كانت $\mu(E)=0$ فإن $\int_E f(x)\,d\mu = 0$

انتهت المحاضرة الأولى.

الأربعاء 16 / 5 / 2018 المحاضرة 17 -

تكامل ليبغ للدالة البسيطة:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, I_{A_i}(x)$$

هو:

$$\int_X \varphi(x)\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \lambda(A_i)$$

تكامل ليبغ للدالة غير السالبة المحدودة

ملاحظة:

الدالة المحدودة $f(x)$ تكون مكاملة إذا تحقق الآتي
إذا كانت منتهية (بشرط $\mu(X)<\infty$)

مثال:

دالة ديرخليه منتهية ومحدودة ومكاملة
حسب ليبغ (ولكنها غير مكاملة حسب ريمان)
ذكرنا الخواص.

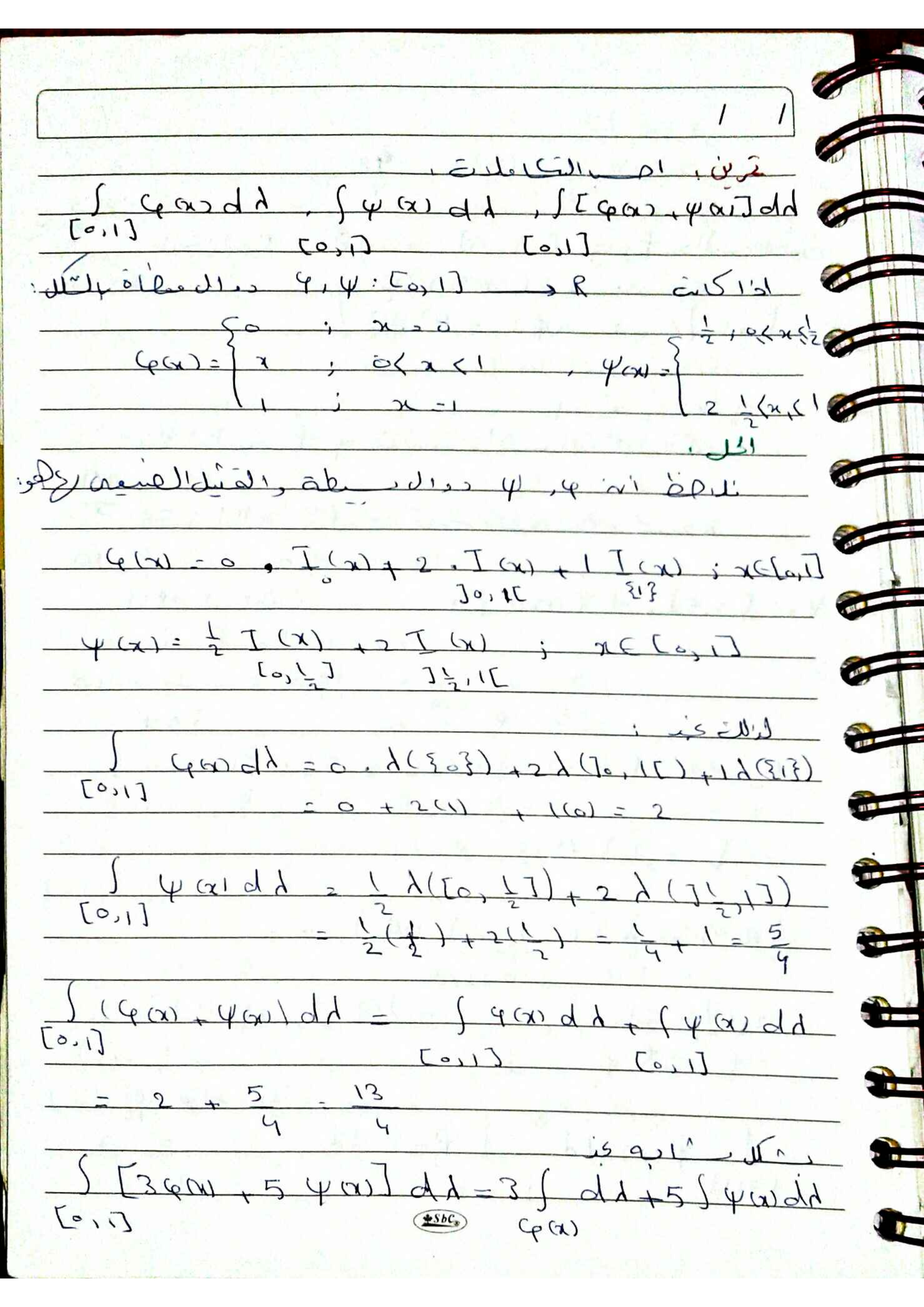
ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مكاملة حسب ريمان
فتكون مكاملة حسب ليبغ والتكاملان متساويان

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu = (R)\int_a^b f(x)\,dx$$

ملاحظة:

إن عكس الملاحظة غير صحيح في الحالة العامة
حيث إن الدالة ديرخليه دالة مكاملة حسب ليبغ
وغير مكاملة حسب ريمان.



/ /

تمرين: احسب التكاملات:

$$\int_{[0,1]} \varphi(x)\,d\lambda \;,\; \int_{[0,1]} \psi(x)\,d\lambda \;,\; \int_{[0,1]} [\varphi(x)+\psi(x)]\,d\lambda$$

إذا كانت $\varphi, \psi : [0,1] \to R$ دوال معطاة بالشكل:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 2 & ; 0 < x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases} \quad , \quad \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن φ, ψ دوال بسيطة, والتمثيل الصحيح لها هو:

$$\varphi(x) = 0 \cdot I_{0}(x) + 2 \cdot I_{]0,1[}(x) + 1\, I_{\{1\}}(x) \quad ; x \in [0,1]$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} I_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + 2\, I_{]\frac{1}{2},1[}(x) \quad ; x \in [0,1]$$

لذلك فإن:

$$\int_{[0,1]} \varphi(x)\,d\lambda = 0 \cdot \lambda(\{0\}) + 2\lambda(]0,1[) + 1\lambda(\{1\})$$
$$= 0 + 2(1) + 1(0) = 2$$

$$\int_{[0,1]} \psi(x)\,d\lambda = \frac{1}{2}\lambda([0,\tfrac{1}{2}]) + 2\lambda(]\tfrac{1}{2},1])$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\int_{[0,1]} (\varphi(x)+\psi(x))\,d\lambda = \int_{[0,1]} \varphi(x)\,d\lambda + \int_{[0,1]} \psi(x)\,d\lambda$$

$$= 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

بشكل مشابه فإن:

$$\int_{[0,1]} [3\varphi(x) + 5\psi(x)]\,d\lambda = 3\int \varphi(x)\,d\lambda + 5\int \psi(x)\,d\lambda$$

/ /

$= 3(2) + 5(\frac{5}{4}) = \frac{49}{4}$

تمرين -2-

لتكن لدينا $f, g : [-2,5] \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [-2,5] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \notin [-2,5] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

أثبت أن الدالتين f, g قابلتين للتكامل واحسب التكامل لكل منهما.

الحل:

تكون الدالة قابلة للتكامل إذا كانت متوسطة ومحدودة

هل f متوسطة، محدودة ؟!

لذلك لدينا هنا $\forall x \in [-2,5], \ |f(x)| \leq 1$

← فإن f دالة محدودة.

هل هي متوسطة ؟!

نلاحظ $f \overset{a.e}{=} 0$ لأنه:

$$E_0 = E(f \neq 0) = \{x \in [-2,5] , f(x) \neq 0\}$$
$$= \{x \in [-2,5] , f(x) = 1\}$$
$$= [-2,5] \cap \mathbb{Q}$$

$$\lambda(E_0) = \lambda([-2,5] \cap \mathbb{Q}) = 0$$

معدودة

وبما أن الدالة الصفرية قابلة للتكامل $f_1(x) = 0$ على $[-2,5]$

(لأن f_1 متوسطة محدودة) و $f \overset{a.e}{=} f_1$

فإن f قابلة للتكامل أيضاً ويكون

$$\int_{[0,1]} f(x)\, d\lambda = \int_{[0,1]} f_1(x)\, d\lambda$$

/ /

للدالة f

ط) اثبت ان الدالة f محدودة وتثبت انها متوسة

$$E(f>c) = \{x \in [-2,5] : f(x) > c\}$$

$$= \begin{cases} [-2,5] & ; c < 0 \\ [-2,5] \cap Q & ; 0 \leq c < 1 \\ \emptyset & ; c \geq 1 \end{cases}$$

ومن ذلك ينتج ان الدالة f متوسة

∴ f متوسة، محدودة فهي محولة وتكاملها

$$\int_{[-2,5]} f(x)\, d\lambda = \int_{[-2,5]\cap Q} f(x)\, d\lambda + \int_{[-2,5]\setminus Q} f(x)\, d\lambda$$

$$= 0 + 0 = 0$$

تكون الدالة g محولة اذا كانت متوسة، محدودة.

معا لدينا:

$$|g(x)| = |x^2+1| < 26 \; ; \; \forall x \in [-2,5]$$

∴ g محدودة

، الدالة g متوسة لانها مستمرة

لذلك محولة g وتكاملها

$$\int_{[-2,5]} g(x)\, d\lambda = \int_{-2}^{5} (x^2+1)\, d\lambda = \left.\frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{5} = ?$$

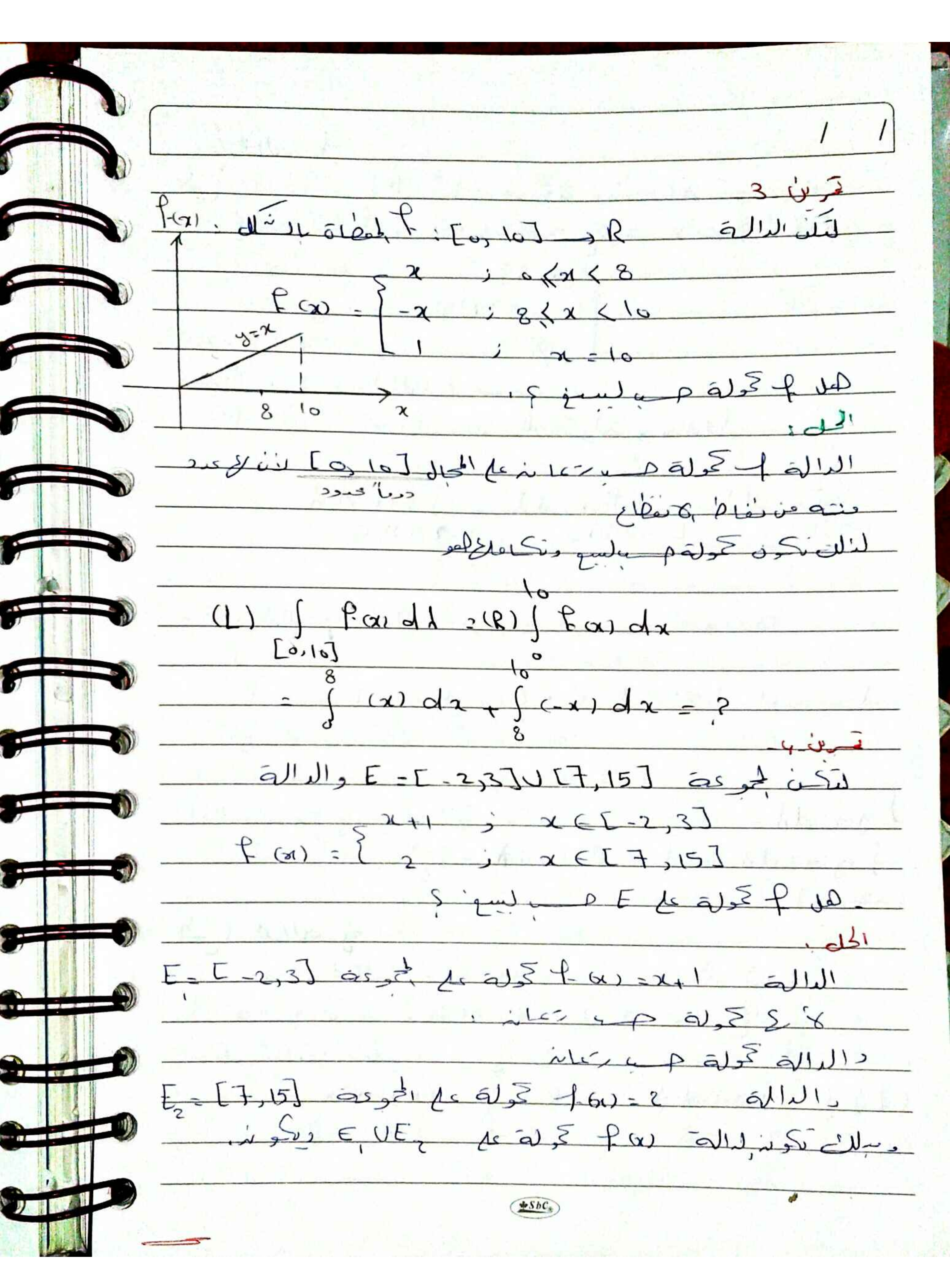
ط) للدالة g

معا ان الدالة $g(x) = x^2+1$ مستمرة فهي محولة

حسب ريمان وبالتالي فهي محولة حسب ليبيغ

وتكون التكاملان متساويان اي ان

$$(L)\int_{[-2,5]} g(x)\, d\lambda = (R)\int_{-2}^{5} g(x)\, dx = \text{---}$$



/ /

تمرين 3

لتكن الدالة $f : [0,10] \to \mathbb{R}$ المعطاة بالشكل: $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 8 \\ -x & ; 8 \leq x < 10 \\ 1 & ; x = 10 \end{cases}$$

هل f كمولة حسب ليبيغ ؟

الحل:

الدالة f كمولة حسب ريمان على المجال $[0,10]$ (دوماً محدود) لأنه يوجد عدد منته من نقاط الانقطاع

لذلك تكون كمولة حسب ليبيغ وتكاملاهما

$$(L) \int_{[0,10]} f(x)\, d\lambda = (R) \int_0^{10} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^8 (x)\, dx + \int_8^{10} (-x)\, dx = ?$$

تمرين 4

لتكن المجموعة $E = [-2,3] \cup [7,15]$ والدالة

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \in [-2,3] \\ 2 & ; x \in [7,15] \end{cases}$$

هل f كمولة على E حسب ليبيغ ؟

الحل:

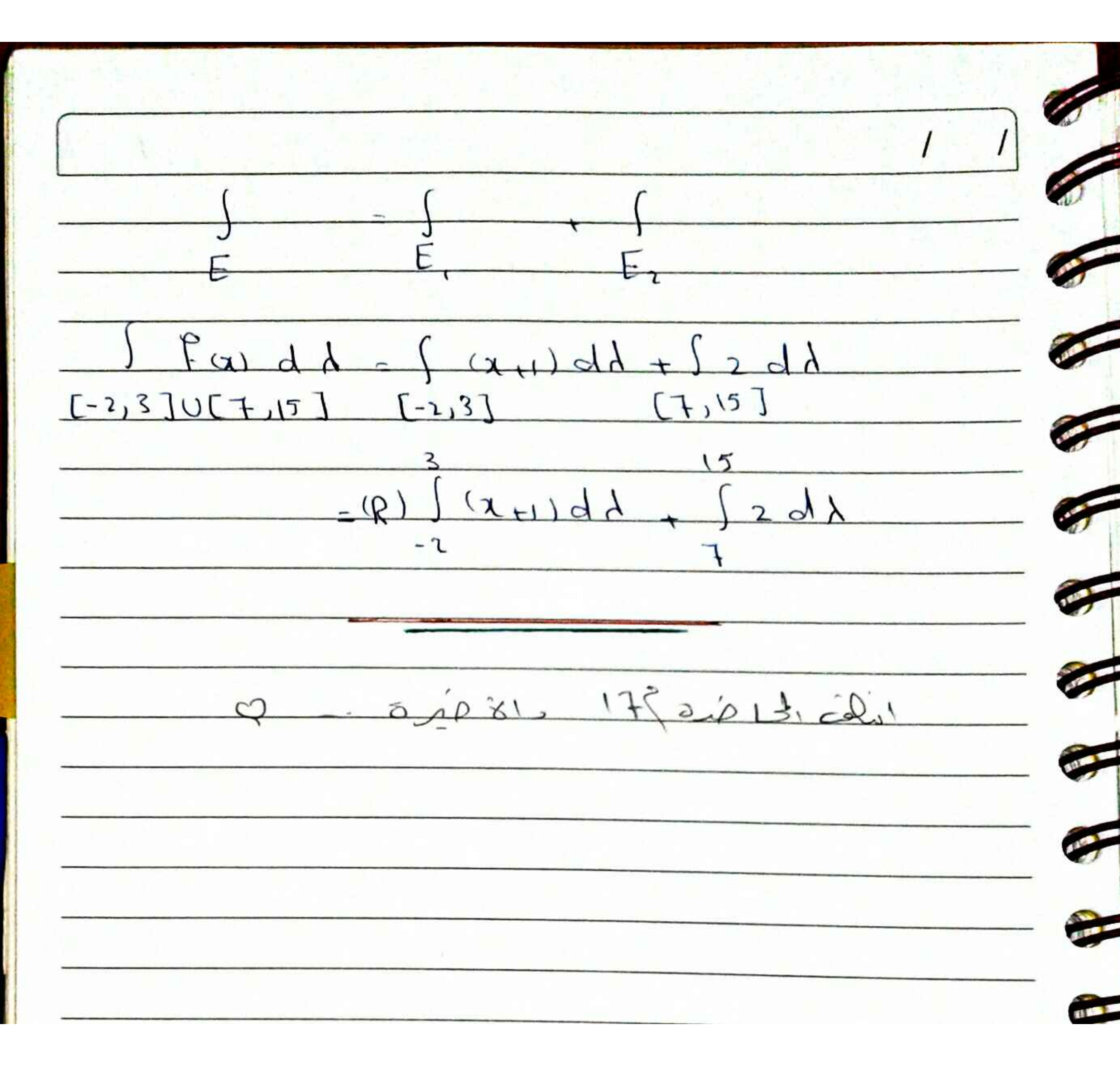
الدالة $f(x) = x+1$ كمولة على المجموعة $E_1 = [-2,3]$

لأنها كمولة حسب ريمان

د الدالة كمولة حسب ريمان

والدالة $f(x) = 2$ كمولة على المجموعة $E_2 = [7,15]$

وبذلك تكون الدالة $f(x)$ كمولة على $E_1 \cup E_2$ ويكون



/ /

$$\int_{E} = \int_{E_1} + \int_{E_2}$$

$$\int_{[-2,3]\cup[7,15]} f(x)\, d\lambda = \int_{[-2,3]} (x+1)\, d\lambda + \int_{[7,15]} 2\, d\lambda$$

$$= (R)\int_{-2}^{3} (x+1)\, d\lambda + \int_{7}^{15} 2\, d\lambda$$

انتهت المحاضرة 17 ـ الأخيرة ـ ♡